

BEMERKUNGEN ÜBER DIE SCHÖNE BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN REIHEN DER DIREKTEN WIE REZIPROKEN POTENZEN*

Leonhard Euler

§1 Die Beziehung, welche ich mir hier zu entwickeln vorgenommen habe, betrifft die Summen dieser beiden unendlichen Reihen:

$$\odot = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \text{etc.},$$

von welchen die erste alle positiven oder direkten Potenzen der natürlichen Zahlen, zu irgendeinem beliebigem Exponenten m , enthält, und die anderen die negativen oder reziproken Potenzen derselben natürlichen Zahlen, zu dem ebenfalls beliebigen Exponenten n , wobei die Vorzeichen der beiden Reihen alternieren. Mein Hauptziel ist es also zu beweisen, dass, obwohl diese zwei Reihen von vollkommen unterschiedlicher Natur sind, sie in einer sehr schönen Beziehung zueinander stehen, sodass, wenn man vermochte, die Summe der einen der beiden Arten allgemein zu berechnen, auch die Summe der anderen Arten daraus ableiten kann. Anders ausgedrückt will ich zeigen, dass, wenn man die Summe der ersten Reihe für einen beliebigen Exponenten m kennt, man dann auch immer die Summe der anderen Reihe für

*Originaltitel: "Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que reciproques", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, Band 17 (1768, geschrieben 1749): pp. 83 – 106, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 70 – 90, Eneström Nummer E352, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

den Exponenten $n = m + 1$ bestimmen kann. Diese Bemerkung erscheint mir umso wichtiger, zumal sie noch nicht mit mehr als einer Induktion begründet ist, welche ich aber bis zu einem solchen Grad an Gewissheit erhärten werde, dass man sie als sehr streng bewiesen betrachten kann.

§2 Für die Reihen der ersten Gattung, deren Terme immer größer und größer werden, ist es richtig, dass man ohne weitere Begründung keine Auffassung von ihrer Summe bilden kann, während man unter der Summe einen solchen Wert versteht, welchem man sich immer mehr annähert, je mehr Terme man tatsächlich sammelt. Also, wenn man sagt, dass die Summe von dieser Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.} = \frac{1}{4}$ ist, muss das sehr widersprüchlich erscheinen; denn wenn man 100 Terme dieser Reihe sammelt, findet man -50 , die Summe von 101 Termen gibt hingegen $+51$, welche Werte sehr verschieden von $\frac{1}{4}$ sind, und sie werden sogar noch verschiedener, wenn man die Anzahl der Terme vermehrt. Allerdings habe ich schon bei einer anderen Gelegenheit bemerkt, dass man dem Wort "Summe" eine umfassendere Bedeutung geben sollte und auf einen Bruch oder anderen analytischen Ausdruck ausdehnen sollte, welcher nach den Prinzipien der Analysis entwickelt, gerade die Reihe ergibt, deren Summe man sucht. Nach Etablierung dieser Bedeutung ist es nicht mehr zweifelhaft, dass die Summe dieser Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.}) \frac{1}{4}$ ist, weil sie aus der Entwicklung dieser Formel $\frac{1}{(1+x)^2}$ entspringt, deren Wert unbestreitbar $\frac{1}{4}$ ist. Die Sache wird klar, wenn man diese allgemeine Reihe betrachtet:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \text{etc.},$$

welche aus der Entwicklung dieser Formel $\frac{1}{(1+x)^2}$ ergibt, zu welcher diese Reihe also tatsächlich gleich ist, und das auch im Fall $x = 1$.

§3 Man versteht leicht, dass das Differentialkalkül uns ein sehr einfaches Mittel an die Hand gibt, die Summen von dieser Art von Reihen zu finden, und man entnimmt daraus die folgenden Summationen:

$$\begin{aligned}
1 - x + x^2 - x^3 + \text{etc.} &= \frac{1}{1+x}, \\
1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \text{etc.} &= \frac{1}{(1+x)^2}, \\
1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \text{etc.} &= \frac{1-x}{(1+x)^3}, \\
1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + \text{etc.} &= \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}, \\
1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \text{etc.} &= \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5}, \\
1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \text{etc.} &= \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6}, \\
1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + \text{etc.} &= \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

woher man für die Reihen unserer ersten Gattung, indem man $x = 1$ setzt, die folgenden Summen ableitet:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + 5^0 - 6^0 + \text{etc.} = \frac{1}{2},$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.} = \frac{1}{4},$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{etc.} = -\frac{2}{16},$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.} = +\frac{16}{64},$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{etc.} = -\frac{272}{256},$$

$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{etc.} = +\frac{7036}{1024}.$$

§4 Die Reihen der anderen Gattung $\mathfrak{C}$ kannte man zuvor nur für den Fall $n = 1$, wo

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

ist, deren Summe $\log 2$ ist, bis ich von ihr die Summe der reziproken Reihe der Quadrate gefunden habe, und dann auch von allen anderen geraden Potenzen; nachdem ich bewiesen hatte, dass die Summe von diesen Reihen vom Verhältnis des Umfangs eines Kreises, π , mit Durchmesser 1 abhängt.

Unter Annahme der Summe der Reihen habe ich gefunden

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} &= A\pi^2, & A &= \frac{1}{6}, \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} &= B\pi^4, & B &= \frac{2}{5}A^2, \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} &= C\pi^6, & C &= \frac{4}{7}AB, \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} &= D\pi^8, & D &= \frac{4}{9}AC + \frac{2}{9}B^2, \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{etc.} &= E\pi^{10}, & E &= \frac{4}{11}AD + \frac{4}{11}BC \\
\text{etc.} & & \text{etc.} &
\end{aligned}$$

Daher schließe ich für die Reihen unserer zweiten Art, indem ich die Vorzeichen alternieren lasse

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{etc.} &= \frac{2-1}{2^2} A\pi^2 \\
1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \text{etc.} &= \frac{2^3-1}{2^3} B\pi^4 \\
1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \text{etc.} &= \frac{2^5-1}{2^5} C\pi^6 \\
1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \text{etc.} &= \frac{2^7-1}{2^7} D\pi^8 \\
1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \text{etc.} &= \frac{2^9-1}{2^9} E\pi^{10} \\
1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \text{etc.} &= \frac{2^{11}-1}{2^{11}} F\pi^{12} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Für die Fälle, wo n eine ungerade Zahl ist, waren meine Untersuchungen bezüglich des Findens der Summen bisher erfolglos. Allerdings ist es gewiss, dass sie nicht in einer ersichtlichen Weise von den gleichen Potenzen der Zahl π abhängen. Es ist zu hoffen, dass die folgenden Betrachtungen zu diesem Unterfangen beitragen.

§5 Weil die Zahlen A, B, C, D etc. von größter Wichtigkeit bei diesem Gegenstand sind, werde ich sie hier auch soweit auflisten wie ich sie berechnet habe:

$$\begin{array}{lll}
A = \frac{2^0 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} & H = \frac{2^{14} \cdot 3617}{1 \cdot 2 \cdots 17 \cdot 15'} & P = \frac{2^{28} \cdot 8615841276005}{1 \cdot 2 \cdots 31 \cdot 231}, \\
B = \frac{2^2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot 3} & I = \frac{2^{16} \cdot 43867}{1 \cdot 2 \cdots 19 \cdot 21'} & P = \frac{2^{30} \cdot 84802531453387}{1 \cdot 2 \cdots 33 \cdot 85}, \\
C = \frac{2^4 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot 3} & K = \frac{2^{18} \cdot 122277}{1 \cdot 2 \cdots 21 \cdot 55'} & R = \frac{2^{32} \cdot 902119075042845}{1 \cdot 2 \cdots 35 \cdot 3}, \\
D = \frac{2^6 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdots 9 \cdot 5} & L = \frac{2^{20} \cdot 854513}{1 \cdot 2 \cdots 23 \cdot 3'} & \\
E = \frac{2^8 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdots 11 \cdot 3} & M = \frac{2^{22} \cdot 1181820455}{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 273'}, & \\
F = \frac{2^{10} \cdot 691}{1 \cdot 2 \cdots 13 \cdot 105} & N = \frac{2^{24} \cdot 76977927}{1 \cdot 2 \cdots 27 \cdot 1'}, & \\
G = \frac{2^{12} \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdots 15 \cdot 1} & O = \frac{2^{26} \cdot 2374961029}{1 \cdot 2 \cdots 29 \cdot 15}. &
\end{array}$$

§6 Nun ist es aber auch so, dass von diesen Zahlen A, B, C, D etc. die Summation der Reihen der ersten Gattung $\odot$ in dem Fall abhängt, wo der Exponent m eine ungerade Zahl ist, weil wir von selbigen ja bereits gesehen haben, sofern der Exponent eine gerade Zahl ist, dass die Summe gleich Null wird. Aber zum Nachweis dieser Übereinstimmung muss man eine völlig eigene Methode anwenden. Für dieses Ziel muss man nämlich auf diese allgemeine Methode zurückgreifen, welche ich vor einiger Zeit für die Bestimmung von Reihen aus ihrem allgemeinen Term angegeben habe. Daher sei X eine beliebige Funktion von x , angezeigt als $X = f : x$, und wir betrachten diese bis Unendliche fortgesetzte Reihe:

$$f : x + f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \text{etc.},$$

deren folgende Terme die gleichen Funktionen von $x + \alpha, x + 2\alpha, x + 3\alpha, x + 4\alpha$ etc. sind, und wir setzen die Summe dieser Reihe $= S$,

welche aus eine Funktion von x , wenn man nur $x + \alpha$ anstelle von x schreibt, woher

$$S + \frac{\alpha dS}{1dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \text{etc.}$$

der Ausdruck der Summe dieser Reihe

$$f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \text{etc.}$$

sein wird und daher $S - f : x = S - X$ sein wird, sodass

$$-X = \frac{\alpha dS}{1dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \text{etc.}$$

ist. Aus dieser Gleichung findet man mit der Methode, welche ich anderenorts dargestellt habe

$$S = -\frac{1}{\alpha} \int Xdx + \frac{1}{2}X - \frac{\alpha AdX}{2dx} + \frac{\alpha^3 Bd^3X}{2^3dx^3} - \frac{\alpha^5 Cd^5X}{2^5dx^5} + \text{etc.},$$

wo die Buchstaben A, B, C etc. dieselben Zahlen bezeichnen, welche ich zuvor aufgelistet habe, sodass man mithilfe dieser Formel zur gesuchten Summe S gelangt, so mit der Integralformel $\int Xdx$ wie mit den Differentialen jedweder Ordnung der Funktion X .

§7 Jetzt, um das Alternieren der Vorzeichen einzubringen, schreiben wir anstelle von α hier 2α , um diese Summe zu erhalten:

$$f : x + f : (x + 2\alpha) + f : (x + 4\alpha) + \text{etc.} = \frac{1}{2\alpha} \int Xdx + \frac{1}{2}X - \frac{\alpha AdX}{dx} + \frac{\alpha^3 Bd^3X}{dx^3} - \frac{\alpha^5 Cd^5X}{dx^5} + \text{etc.},$$

von deren Doppeltem wir die vorherige Reihe abziehen, sodass wir dann haben:

$$f : x - f : (x + \alpha) + f : (x + 2\alpha) - f : (x + 3\alpha) + f : (x + 4\alpha) - \text{etc.} = \frac{1}{2}X - \frac{(2^2 - 1)\alpha AdX}{2dx} + \frac{(2^4 - 1)\alpha^3 Bd^3X}{2^3dx} - \frac{(2^6 - 1)\alpha^5 Cd^5X}{2^5dx} + \text{etc.},$$

wo der Term, welcher das Integral $\int Xdx$ enthält, verschwunden ist. Nun setzen wir, um unser Ziel zu erreichen, $f : x = X = x^m$, und wir werden die Summen der folgenden Reihe erhalten:

$$\begin{aligned} & x^m - (x + \alpha)^m + (x + 2\alpha)^m - (x + 3\alpha)^m + (x + 4\alpha)^m - \text{etc.} = \\ & \frac{1}{2}x^m - \frac{(2^2 - 1)m\alpha Ax^{m-2}}{2} + \frac{(2^4 - 1)m(m-1)(m-2)\alpha^3 Bx^{m-3}}{2^3} \\ & \quad - \frac{(2^6 - 1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\alpha^5 Cx^{m-5}}{2^5} \\ & + \frac{(2^8 - 1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)\alpha^7 Dx^{m-7}}{2^7} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

welche immer eine bestimmte Anzahl an Termen beinhaltet, sofern der Exponent m eine positive ist. Also, für $\alpha = 1$, werden wir die Reihen der ersten Gattung $\odot$ erhalten:

$$\begin{aligned} & x^m - (x + 1)^m + (x + 2)^m - (x + 3)^m + (x + 4)^m - (x + 5)^m + \text{etc.} = \\ & \frac{1}{2}x^m - \frac{m}{2}(2^2 - 1)Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 2 \cdot 2}(2^4 - 1)Bx^m \\ & \quad - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}(2^6 - 1)Cx^{m-5} \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}(2^8 - 1)Dx^{m-7} + \text{etc.} \end{aligned}$$

§8 Jetzt haben wir lediglich $x = 1$ anzunehmen, um allgemein die Summe von all unseren Reihen der ersten Gattung zu erlangen. Allerdings werden wir sie noch leichter finden, indem wir $x = 0$ setzen, woher wir die Summe dieser Reihe ableiten:

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - 5^m + 6^m - 7^m + \text{etc.},$$

welche bloß das Negative der Reihe ist, die wir suchen. Setzen wir nun $x = 0$, verschwinden alle Zahlen, welche die Summe bilden, mit Ausnahme des einen Falles, wo der Exponent von x Null ist, was nur in die Fällen geschieht, wo m eine ungerade Zahl ist; denn, wannimmer sie gerade ist, werden alle Terme und daher auch die Summe der Reihe zu Null. Nehmen wir also das Negative dieser Summe, werden wir folgendes finden:

$$\begin{aligned}
m = 0 : & \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \frac{1}{2}, \\
m = 1 : & \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.} = +1 \cdot \frac{2^2 - 1}{2} A, \\
m = 2 : & \quad 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{etc.} = 0, \\
m = 3 : & \quad 1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{etc.} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2^4 - 1}{2^3} B, \\
m = 4 : & \quad 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.} = 0, \\
m = 5 : & \quad 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.} = +1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 \cdot \frac{(2^6 - 1)}{2^5} C, \\
m = 6 : & \quad 1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{etc.} = 0, \\
m = 7 : & \quad 1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{etc.} = -1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot \frac{(2^8 - 1)}{2^7} D, \\
m = 8 : & \quad 1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{etc.} = 0, \\
m = 9 : & \quad 1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{etc.} = +1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot \frac{(2^{10} - 1)}{2^9} E, \\
m = 10 : & \quad 1 - 2^{10} + 3^{10} - 4^{10} + 5^{10} - 6^{10} + \text{etc.} = 0 \\
& \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn man diese Summen entwickelt, findet man dieselben, welche ich oben in § 3 mitgeteilt habe, nun sieht man allerdings ihre Verbindung zu den Buchstaben A, B, C etc.

§9 Wir teilen die Reihen der ersten Gattung $\odot$ durch die der zweiten Gattung $\mathbb{C}$, welche dieselbe Zahlen aus der Progression A, B, C, D etc. beinhaltet und leiten die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{etc.}} &= + \frac{1(2^2 - 1)}{(2 - 1)\pi^2}, \\
\frac{1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.}} &= 0, \\
\frac{1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \text{etc.}} &= - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3(2^4 - 1)}{(2^3 - 1)\pi^4}, \\
\frac{1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{etc.}} &= 0, \\
\frac{1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \text{etc.}} &= + \frac{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot (2^6 - 1)}{(2^5 - 1)\pi^6}, \\
\frac{1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \text{etc.}} &= 0, \\
\frac{1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \text{etc.}} &= - \frac{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot (2^8 - 1)}{(2^7 - 1)\pi^8}, \\
\frac{1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{6^9} + \text{etc.}} &= 0, \\
\frac{1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \text{etc.}} &= + \frac{1 \cdot 2 \cdots 9 \cdot (2^{10} - 1)}{(2^9 - 1)\pi^{10}}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Gleichung, welche diesen vorausgeht, wird

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}} = \frac{1}{2 \log(2)}$$

sein, deren Verbindung zu den folgenden gänzlich im Verborgenen liegt.

§10 Die Betrachtung dieser Gleichung hat mich zu dieser allgemeinen Formel geführt:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{etc.}} =$$

$$N \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n},$$

wo sich alles darauf reduziert, den Koeffizienten in Abhängigkeit vom Exponenten n richtig zu bestimmen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Werte dieses Koeffizienten N , welchem dem Exponenten n zukommen, welche ich gerade ermittelt habe:

$$\begin{array}{c|c} n & 2, 3, \quad 4, 5, \quad 6, 7, \quad 8, 9, \quad 10, \text{ etc.} \\ N & +1, 0, \quad -1, 0, \quad +1, 0, \quad -1, 0, \quad +1, \text{ etc.} \end{array}$$

Und da jedes Mal, wenn n eine ungerade Zahl ist, der Buchstabe N verschwindet, und für die Fälle $n = 4i + 2$ ja $N = +1$ sein muss, aber für die Fälle $n = 4i$ dahingegen $N = -1$ wird, ist es ersichtlich, dass diesen Bedingungen mit der Annahme $N = -\cos \frac{\pi n}{2}$ Genüge geleistet wird. Aus diesem Grund wage ich die folgende Vermutung, dass für jedweden Exponenten n diese Gleichung immer Geltung hat:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \text{etc.}}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Diese Vermutung wird ohne Zweifel als sehr gewagt erscheinen, aber da sie mit den Fällen verträglich ist, wo n eine ganze positive Zahl größer als die Einheit ist, werde ich ihre Gültigkeit zuerst für den Fall $n = 1$ und dann $n = 0$ zeigen. Danach werde ich schauen, dass, wenn diese Vermutung für die Fälle gesichert ist, wo n eine positive Zahl ist, sie es auch sein wird, wannimmer n eine negative Zahl ist, und ich werde auch einige Fälle entwickeln, wo man n einen gebrochenen Wert zuschreibt.

§11 Es sei zunächst $n = 1$, damit man diese Form

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}}$$

erhält, deren Wert wir wissen $= \frac{1}{2 \log 2}$ zu sein; unser Ausdruck gibt für diesen Fall $1 \cdot 2 \cdots (n-1) = 1$, $2^n - 1 = 1$, $\pi^n = \pi$, aber die beiden Ausdrücke $\cos \frac{n\pi}{2}$ und $2^{n-1} - 1$ verschwinden jeweils. Daher stelle ich den Wert, welchen unsere Vermutung für diesen Fall gibt, so dar:

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1},$$

wo es nun darum geht, den Wert des Bruchs $\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1}$ im Fall $n = 1$ zu bestimmen, wo Zähler und Nenner verschwinden. Wir betrachten nun den Buchstaben n als Variable und weil das Differential des Zählers $-\frac{\pi dn}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$ und das des Nenners $2^{n-1} dn \log 2$ ist, wird unser Bruch für diesen Fall derselbe sein wie $-\frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} \log 2}$, welche sich für $n = 1$ auf diesen $-\frac{\pi}{2 \log 2}$ reduziert, sodass der Wert, den wir suchen, sein wird:

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1} = +\frac{1}{2 \log 2},$$

so wie es ja per se klar ist. Da unsere Vermutung also auch für den Fall $n = 1$ gilt, welcher zunächst völlig von den folgenden Fällen abzuweichen schien, ist dies schon ein sehr starkes Anzeichen für die Gültigkeit dieser Vermutung, und weil es unmöglich ist, dass eine falsche Annahme diese Prüfung bestanden haben könnte, könnte man unsere Vermutung als sehr stark untermauert ansehen: Aber ich werde noch andere genauso überzeugende Beweise anführen.

§12 Es sei nun $n = 0$, dass wir diese Form haben

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}}{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}},$$

deren Wert offenkundig $= 2 \log 2$ ist. Weil unsere Vermutung wegen $\cos \frac{n\pi}{2} = 1$, $2^{n-1} - 1 = -\frac{1}{2}$ und $\pi^n = 1$ für diesen Fall $+2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(2^n - 1)$ ist, dessen Faktor $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ unendlich ist, und der andere $2^n - 1$ verschwindet, sieht man nun, dass unsere Vermutung nicht durch diesen Fall widerlegt wird: Aber, um auch die vollständige Übereinstimmung zu beweisen, bemerke ich, dass, weil ja im Allgemeinen gilt:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

und man im Fall $n = 0$ ja $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 1$ hat, wir für diesen selben Fall $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) = \frac{1}{n}$ haben werden, und der aus unserer Vermutung abgeleitete Wert $= \frac{2(2^n - 1)}{n}$ sein wird, weil wo Zähler und Nenner für $n = 0$ gesetzt verschwinden, hat man anstelle derer ihre Differentiale nach der Variable n zu setzen, um den anderen Bruch $\frac{2 \cdot 2^n \frac{dn \log 2}{dn}}{dn} = 2 \cdot 2^n \log 2$ zu erhalten, welchem jenem für den Fall $n = 0$ gleichwertig ist. Dieser gibt uns aber offensichtlich denselben Wert $2 \log 2$, wie die Natur der Reihen es verlangt. Hier hat man also einen neuen Beweis, welcher zusammen mit dem vorherigen durchaus für einen vollständigen Beweis unserer Vermutung gehalten werden kann. Es ist indes allzu gerechtfertigt immer noch einen direkten Beweis unserer Vermutung zu fordern, welcher alle möglichen Fälle auf einmal umfasst.

§13 Nachdem unsere Vermutung schon für alle Fälle, wo n eine ganze positive Zahl ist, richtig ist, werde ich nun zeigen, dass sich auch mit der Wahrheit verträglich ist, wenn für n irgendeine ganze negative Zahl eingesetzt wird. Aber in diesen Fällen wird der Wert der Formel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1)$ unendlich werden, was den Beweis, welchen ich führen will, vor Probleme zu stellen scheint: Aber eine andere Beobachtung, welche ich anderenorts gezeigt habe, wird diesen Umstand beseitigen. Nimmt man das Zeichen $[\lambda]$, um das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda$ anzuzeigen, habe ich demonstriert, dass stets $[\lambda][-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin \lambda\pi}$ gilt. Man setze nun $n = 1 - m$ oder $n = -m + 1$, um folgenden Ausdruck zu erhalten:

$$\frac{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} + 6^{-m} + \text{etc.}}{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \text{etc.}} = 0$$

$$\frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m)(2^{-m+1} - 1)}{(2^{-m} - 1)\pi^{-m+1}} \cos \frac{(1 - m)\pi}{2},$$

wo wir wegen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m) = [-m]$ und $[m][-m] = \frac{m\pi}{\sin m\pi}$ entsprechend

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m) = \frac{m\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot \sin m\pi} = \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m - 1) \cdot \sin m\pi}$$

erhalten werden. Weiter hat man $\cos \frac{(1-m)\pi}{2} = \sin \frac{m\pi}{2}$ und mit dieser Substitution wird der gefundene Ausdruck diese Form annehmen:

$$-\frac{2 \cdot (2^{m-1} - 1)\pi^m}{(2^m - 1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m - 1) \cdot \sin m\pi} \cdot \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$-\frac{(2^{m-1}-1)\pi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)(2^m-1) \cos \frac{m\pi}{2}},$$

da ja $\sin m\pi = 2 \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2}$ ist. Nun haben wir lediglich noch die gefundene Gleichung zu invertieren, indem wir die Nenner nach oben und die Zähler nach unten setzen, und wir werden diese Gleichung haben:

$$\frac{1 - 2^{-m} + 3^{-m} - 4^{-m} + 5^{-m} + 6^{-m} + \text{etc.}}{1 - 2^{m-1} + 3^{m-1} - 4^{m-1} + 5^{m-1} - 6^{m-1} + \text{etc.}} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-m)(2^{-m+1}-1)}{(2^{-m}-1)\pi^{-m+1}} \cos \frac{(1-m)\pi}{2},$$

welche dieselbe ist wie die angenommene; man sieht sehr klar, dass, wenn die angenommene für den Fall, in dem n eine positive Zahl ist, wahr ist, sie auch wahr sein wird, wannimmer n eine negative Zahl ist, weil ja $m = -n + 1$ gilt.

§14 Es zeigt sich noch ein weiterer bemerkenswerter Fall, indem man $n = \frac{1}{2}$ setzt, welcher zu diesem Bruch führt

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \text{etc.}}$$

dessen Zähler und Nenner gleich sind und dessen Wert daher = 1 ist; man hat also zu zeigen, dass der Ausdruck, welcher ihm nach der Vermutung gleich ist, also:

$$-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (-\frac{1}{2})(\sqrt{2}-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)} \cos \frac{\pi}{4} = + \frac{\left[-\frac{1}{2}\right] \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left[-\frac{1}{2}\right]}{\sqrt{\pi}}$$

ebenfalls diesen Wert hat. Nun habe ich bei anderer Gelegenheit bewiesen, als ich die hypergeometrische Progression $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ etc. untersucht habe, deren allgemeiner Term $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = [n]$ ist, dass man für $n = \frac{1}{2}$ dann $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ hat; und da $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right]$ ist, ist es ersichtlich, dass $\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gilt, und daher unser Ausdruck tatsächlich = 1 werden wird. Dies sollte keinen weiteren Zweifel an der Gültigkeit unser Vermutung lassen, da wir sie nicht nur für die Fälle bewiesen haben, wo der Exponent n irgendeine ganze Zahl ist, positiv oder negativ, sondern auch für den Fall $n = \frac{1}{2}$. Für andere Fälle von gebrochenen Zahlen, welche man für n einsetzen möchte, sollte man keinen eigenen Beweis anstreben, im Hinblick darauf, dass bis jetzt

noch keine geeignete Methode entdeckt worden ist, die Summe dieser Reihe $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \text{etc.}$ zu ermitteln, wenn der Exponent n ein Bruch ist. In diesem Fall muss man mit Approximationen zufrieden sein. Dann wird man auch sehen, dass unsere Vermutung der Wahrheit entspricht.

§15 Um einen Versuch zu unternehmen, sei $n = \frac{3}{2}$, und der Bruch

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} + \text{etc.}}$$

muss wegen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

dieser Größe $\frac{2\sqrt{2}-1}{2(2-\sqrt{2})\pi} = \frac{3+\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0,4967738$ gleich sein. Aber die obere Reihe, indem man die ersten Terme addiert, wird

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{8} + \sqrt{9} = 1,9217396662,$$

von welcher die Summe aller folgenden unendlich vielen Terme $\sqrt{10} - \sqrt{11} + \sqrt{12} - \sqrt{13} + \sqrt{14} - \text{etc.}$ abgezogen werden muss, welche nach § 7

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{10} - \frac{1(2^2-1)}{4} \cdot \frac{A}{\sqrt{10}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3(2^4-1)}{4^3} \cdot \frac{B}{10^2 \sqrt{10}} - \\ & \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4^5} (2^6-1) \cdot \frac{C}{10^4 \sqrt{10}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4^7} (2^8-1) \cdot \frac{D}{10^5 \sqrt{10}} \\ & = \frac{\sqrt{10}}{2} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{A}{10} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 255}{2^{13}} \cdot \frac{D}{10^7} - \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

Aber weil $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$ ist, ergibt sich der Wert dieses Ausdrucks $= 0,487507745 \cdot \sqrt{10}$, welcher näherungsweise $= 1,541610$ ist, und daher ist die obere Reihe $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \text{etc.} = 0,380129$. Dann geben für die untere Reihe die ersten 9 Terme $0,7821470744$, von welcher man die Summe aller folgenden Terme abziehen muss, welche $= \frac{1}{20\sqrt{10}} \left(1 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{A}{10} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} - \text{etc.} \right)$ ist, und das ist

näherungsweise = 0,01698880, woher die Summe der unendlichen Reihe = 0,765158 sein wird. Wenn wir nun die erste Reihe dividiert durch diese betrachten, oder eben diesen Bruch $\frac{0,380129}{0,765158}$, und schauen, ob er dem Wert 0,4967738 gleich ist, erkennen wir diesen Unterschied als so klein, dass er nicht einmal ein Zweitausendstel beträgt, sodass man kaum bezweifeln kann, dass die Vermutung bis allumfassend wahr ist.

§16 Da also unsere Vermutung nun zum höchsten Wert an Gewissheit gehoben worden ist, dass man nicht einmal mehr einen Zweifel an den Fällen haben kann, wo man für n eine gebrochene Zahl einsetzt, wollen wir noch die Fälle auflisten, in denen n ein Bruch der Form $\frac{2i+1}{2}$ ist, welche sind:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= + \frac{1(2\sqrt{2} - 1)}{2^1(2 - \sqrt{2})\pi}, \\
\frac{1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^2\sqrt{2}} + \frac{1}{3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{4^2\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= + \frac{1 \cdot 3(4\sqrt{2} - 1)}{2^2(4 - \sqrt{2})\pi^2}, \\
\frac{1 - 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt{3} - 4^2\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^3\sqrt{2}} + \frac{1}{3^3\sqrt{3}} - \frac{1}{4^3\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(8\sqrt{2} - 1)}{2^3(8 - \sqrt{2})\pi^3}, \\
\frac{1 - 2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{3} - 4^3\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^4\sqrt{2}} + \frac{1}{3^4\sqrt{3}} - \frac{1}{4^4\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7(16\sqrt{2} - 1)}{2^4(16 - \sqrt{2})\pi^4}, \\
\frac{1 - 2^4\sqrt{2} + 3^4\sqrt{3} - 4^4\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^5\sqrt{2}} + \frac{1}{3^5\sqrt{3}} - \frac{1}{4^5\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9(32\sqrt{2} - 1)}{2^5(32 - \sqrt{2})\pi^5}, \\
\frac{1 - 2^5\sqrt{2} + 3^5\sqrt{3} - 4^5\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^6\sqrt{2}} + \frac{1}{3^6\sqrt{3}} - \frac{1}{4^6\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11(64\sqrt{2} - 1)}{2^6(64 - \sqrt{2})\pi^6}, \\
\frac{1 - 2^6\sqrt{2} + 3^6\sqrt{3} - 4^6\sqrt{4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2^7\sqrt{2}} + \frac{1}{3^7\sqrt{3}} - \frac{1}{4^7\sqrt{4}} + \text{etc.}} &= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13(128\sqrt{2} - 1)}{2^7(128 - \sqrt{2})\pi^7} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

wo man bemerke, dass der allgemeine Bruch $\frac{2^\lambda\sqrt{2}-1}{2^\lambda-\sqrt{2}}$ sich auf diesen $\frac{(2^{2\lambda}-1)\sqrt{2}+2^\lambda}{2^{2\lambda}-2}$ reduziert. Also, sofern man von einem gewissen Paar dieser Reihen die Sum-

me von einer gefunden hat, wird man auch die der anderen vermöge der Quadratur des Kreises finden.

§17 Bezüglich der Reihen der reziproken Potenzen

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

habe ich angemerkt, dass ihre Summen nur angegeben werden können, wenn der Exponent n eine ganze gerade Zahl ist, und dass für die Fälle, in denen n eine ganze ungerade Zahl ist, all meine Bemühungen bis jetzt vergebens waren. Nachdem aber nun die Summe der reziproken auf die direkten zurückgeführt worden ist, nämlich im Allgemeinen auf diese hier

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \text{etc.},$$

könnte man erwarten, dass man daraus einen Weg zu diesem Ziel finden würde; aber leider trägt es sich hier zu, dass in den Fällen, wo n eine gerade Zahl ist, die Summe der direkten Reihe verschwindet, sodass man daraus gar nichts ableiten kann, denn für $n = 2\lambda + 1$ werden wir nach unserer Vermutung haben:

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \text{etc.} = \\ - \frac{(2^{2\lambda} - 1)\pi^{2\lambda+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda(2^{2\lambda+1} - 1)} \cdot \frac{1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} + \text{etc.}}{\cos \frac{2\lambda+1}{2}\pi}$$

Nun verschwinden im letzten Term des Ausdrucks so der Zähler $1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} + \text{etc.}$ wie der Nenner $\cos \frac{2\lambda+1}{2}\pi = -\sin \lambda\pi$, wenn man eine ganze Zahl für λ nimmt. Es ist freilich war, dass man ohne Mühe den Wert eines solchen Bruches herausfinden kann, indem anstelle des Zählers sowie des Nenners ihre Differentiale einsetzt, aber damit gewinnt man hier nicht viel, wie ich gleich aufzeige werden.

§18 Unter Verwendung dieser Methode ist also das Differential des Zählers

$$2d\lambda(1^{2\lambda} \log(1) - 2^{2\lambda} \log(2) + 3^{2\lambda} \log(3) - 4^{2\lambda} \log(4) + \text{etc.})$$

und das des Nenners $= -\pi d\lambda \cos \lambda\pi$, sodass wir für unseren Fall die Summe so ausgedrückt erhalten:

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \text{etc.}$$

$$= \frac{2(2^{2\lambda} - 1)\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2\lambda(2^{2\lambda+1} - 1) \cos \lambda\pi} \left(1^{2\lambda} \log(1) - 2^{2\lambda} \log(2) + 2^{2\lambda} \log(2) - 4^{2\lambda} \log(4) \right),$$

aus welcher wir durch Einsetzen der Zahlen 1, 2, 3 etc. anstelle von λ die folgenden Summationen ableiten:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = - \frac{2 \cdot 3 \pi^2 (1 \log(1) - 2^2 \log(2) + 3^2 \log(3) - 4^2 \log(4) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 7},$$

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \text{etc.} = + \frac{2 \cdot 15 \cdot \pi^4 (1 \log(1) - 2^4 \log(2) + 3^4 \log(3) - 4^4 \log(4) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 31},$$

$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \text{etc.} = - \frac{2 \cdot 63 \cdot \pi^6 (1 \log(1) - 2^6 \log(2) + 3^6 \log(3) - 4^6 \log(4) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 6 \cdot 127},$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \text{etc.} = - \frac{2 \cdot 255 \cdot \pi^8 (1 \log(1) - 2^8 \log(2) + 3^8 \log(3) - 4^8 \log(4) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8 \cdot 511},$$

$$1 - \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} - \frac{1}{4^{11}} + \text{etc.} = - \frac{2 \cdot 1023 \cdot \pi^{10} (1 \log(1) - 2^{10} \log(2) + 3^{10} \log(3) - 4^{10} \log(4) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2047},$$

etc.

Man hätte also nun die Summen der Reihen, welche in dieser Form

$$1^{2\lambda} \log(1) - 2^{2\lambda} \log(2) + 3^{2\lambda} \log(3) - 4^{2\lambda} \log(4) + \text{etc.}$$

erfasst sind, zu finden. Aber diese Suche ist vielleicht schwieriger als die, die wir eigentlich vorhaben, und ich kenne keine Methode, welche uns zu gesetzten Ziel führen könnte.

§19 Diese Gleichungen werden ein wenig leichter, wenn man betrachtet, dass diese Reihe $1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \text{etc.}$ dieser gleich ist:

$$\frac{2^m - 1}{2(2^m - 1)} \left(1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \text{etc.} \right),$$

woher wir zuerst im Allgemeinen hat:

$$1 + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} + \frac{1}{7^{2\lambda+1}} + \frac{1}{9^{2\lambda+1}} + \text{etc.} =$$

$$-\frac{\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda \cos \lambda \pi} \left(2^{2\lambda} \log(2) - 3^{2\lambda} \log(3) + 4^{2\lambda} \log(4) - 5^{2\lambda} \log(5) + \text{etc.} \right)$$

und weiter für die speziellen Fälle

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = + \frac{\pi^2(2^2 \log(2) - 3^2 \log(3) + 4^2 \log(4) - \text{etc.})}{1 \cdot 2},$$

$$1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \text{etc.} = - \frac{\pi^4(2^4 \log(2) - 3^4 \log(3) + 4^4 \log(4) - \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \text{etc.} = + \frac{\pi^6(2^6 \log(2) - 3^6 \log(3) + 4^6 \log(4) - \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$1 + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \text{etc.} = - \frac{\pi^8(2^8 \log(2) - 3^8 \log(3) + 4^8 \log(4) - \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

etc.

Hier ist aber sorgfältig zu beachten, dass die allgemeine Summe der letzten zwei Paragraphen nur wahr ist, sofern der Exponent λ eine ganze positive Zahl ist, da sie auf dieser Bedingung basiert, dass die Summe dieser Reihe $1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \text{etc.}$ Null ist: Weil dies im Fall $\lambda = 0$ nicht mehr wahr ist, kann man also für λ nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 etc. einsetzen. Ich füge noch eine Bemerkung über die Reihe $\log(2) - \log(3) + \log(4) - \log(5) + \text{etc.}$ hinzu, nämlich dass ihre Summe $= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2}$ ist, woher eine gewisse Hoffnung auf Erfolg auch für die anderen Reihen verbleibt, zu welchen ich hier geleitet worden bin.

§20 Auf dieselbe Weise kann man auch die Summen dieser zwei unendlichen Reihen miteinander vergleichen

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \text{etc.} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

und eine ähnliche Vermutung führt uns zu diesem *Theorem*:

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \text{etc.}}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \text{etc.}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

wo man in den Fällen, in denen n eine gerade ganze positive Zahl ist, geschieht, dass die obere Reihe verschwindet; und in diesen Fällen wird auch der Sinus des Winkels $\frac{\pi n}{2}$ Null sein. Nun werden wir für $n = 2\lambda$ haben:

$$1 - \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} - \frac{1}{7^{2\lambda}} + \text{etc.} = \\ - \frac{\pi^{2\lambda-1} (3^{2\lambda-1} \log(3) - 5^{2\lambda-1} \log(5) + 7^{2\lambda-1} \log(7) - \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2\lambda - 1) 2^{2\lambda-1} \cos \lambda \pi},$$

wobei λ eine beliebige positive ganze Zahl ist. Daraus leiten wir die folgenden Summationen ab:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} = + \frac{\pi(3 \log(3) - 5 \log(5) + 7 \log(7) + \text{etc.})}{1 \cdot 2^1}, \\ 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} = - \frac{\pi^3(3^3 \log(3) - 5^3 \log(5) + 7^3 \log(7) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}, \\ 1 - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7^6} = + \frac{\pi^5(3^5 \log(3) - 5^5 \log(5) + 7^5 \log(7) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5}, \\ 1 - \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{7^8} = - \frac{\pi^7(3^7 \log(3) - 5^7 \log(5) + 7^7 \log(7) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7}, \\ 1 - \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{7^{10}} = + \frac{\pi^9(3^9 \log(3) - 5^9 \log(5) + 7^9 \log(7) + \text{etc.})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 2^9}$$

etc.

Diese letzte Vermutung enthält einen einfacheren Ausdruck als die vorhergehenden; weil sie ja gleichermaßen gewiss ist, ist also zu hoffen, dass man erfolgreicher an der Suche eines vollständigen Beweises arbeiten wird, welcher ohne Zweifel viel Licht auf eine riesige Menge anderer Untersuchungen von dieser Art werfen wird.